SCIENTIA • LABOR • LIBERTAS

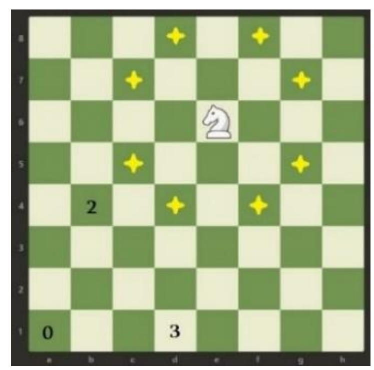
ᲗᲐᲘᲡᲣᲤᲐᲚᲘ ᲣᲜᲘᲕᲔᲠᲡᲘᲢᲔᲢᲘ

ᲝᲘᲚᲔᲠᲘᲡ ᲝᲚᲘᲛᲞᲘᲐᲓᲐ – 2026. ᲞᲘᲠᲕᲔᲚᲘ ᲢᲣᲠᲘ. (ᲞᲘᲠᲕᲔᲚᲘ ᲡᲔᲡᲘᲐ)

Ა Მ Ო Ხ Ს Ნ Ე Ბ Ი

ამოცანა 1: *საჭადრაკო დაფა* (1 ქულა)

(ამოცანის ავტორი: მელიქიძე ზაზა)



ლეონარდმა საჭადრაკო დაფის თითოეულ უჯრაში ჩაწერა ის რიცხვი, რა მინიმალური რაოდენობის სვლითაც არის შესაძლებელი ამ უჯრიდან $a1$ უჯრაში მოხვედრა მხედრის მოძრაობით (იხილეთ ფოტო). მაგალითად, თავად $a1$ უჯრაში ჩაწერა 0, $b4$ უჯრაში - 2, $d1$ უჯრაში - 3 და ა. შ... იპოვეთ ყველა უჯრაში ჩაწერილი რიცხვების ჯამი?

ა მ ო ხ ს ნ ა:

პ ა ს უ ხ ი: 220

ამ ამოცანის ერთადერთი სირთულე არის ის, რომ არ უნდა შეგვეშალოს რიცხვების სწორად ჩასმა და შემდეგ სწორად შეკრება. ამიტომ მივმართავთ გარკვეულ ალგორითმს, რომ თავი მაქსიმალურად დავიზღვიოთ შეცდომისგან.

პირველ რიგში შევნიშნოთ, რომ რაიმე X უჯრიდან $a1$ უჯრაში მოსახვედრად საჭირო მხედრის სვლების მინიმალური რაოდენობა და, პირიქით, $a1$ უჯრიდან რაიმე X უჯრაში მოსახვედრად საჭირო მხედრის სვლების მინიმალური რაოდენობა ერთმანეთს ემთხვევა. ამიტომ ჩვენ $a1$ უჯრიდან დავიწყებთ მოძრაობას და გადავითვლით თუ რა მინიმალური რაოდენობის სვლებით ვხვდებით ამა თუ იმ უჯრაში.

დავიწყოთ ცხრილის შევსება. თითოეულ უჯრაში ჩავწეროთ ის რიცხვი რამდენი სვლითაც მოვხვდებოდით მასში $a1$ უჯრიდან მხედრის სვლებით. თავიდან, ცხადია, $a1$ უჯრაში ჩაიწერება 0. შემდეგ $b3$ და $c2$ უჯრებში ჩაიწერება „1“-იანები. სულ დაიწერება ორი „1“-იანი. შემდეგ ამ „1“-იანებიდან სადაც შეგვიძლია მოხვედრა, იმ უჯრებში (თუ ცარიელია) ჩაიწერება „2“-იანები. სულ დაიწერება ცხრა „2“-იანი. შემდეგ „2“-იანებიდან სადაც შეგვიძლია მოხვედრა, იმ უჯრებში (თუ ცარიელია) ჩაიწერება „3“-იანები. სულ დაიწერება ოცი „3“-იანი. „3“-იანებიდან სადაც შეგვიძლია მოხვედრა, იმ უჯრებში (თუ ცარიელია) ჩაიწერება „4“-იანები. სულ დაიწერება ოცდაერთი „4“-იანი. „4“-იანებიდან სადაც შეგვიძლია მოხვედრა, იმ უჯრებში (თუ ცარიელია) ჩაიწერება „5“-იანები. სულ დაიწერება ათი „5“-იანი. და ბოლოს, $h8$ უჯრაში დაიწერება ერთი „6“-იანი.

	1						
		1					
0							

2		2					
	2		2				
2	1			2			
		1	2				
0		2		2			

	3		3				
3		3		3			
2	3	2	3		3		
3	2	3	2	3		3	
2	1		3	2	3		
3		1	2	3		3	
0	3	2	3	2	3		

	4		4		4		
4	3	4	3	4		4	
3	4	3	4	3	4		4
2	3	2	3	4	3	4	
3	2	3	2	3	4	3	4
2	1	4	3	2	3	4	
3	4	1	2	3	4	3	4
0	3	2	3	2	3	4	

5	4	5	4	5	4	5	
4	3	4	3	4	5	4	5
3	4	3	4	3	4	5	4
2	3	2	3	4	3	4	5
3	2	3	2	3	4	3	4
2	1	4	3	2	3	4	5
3	4	1	2	3	4	3	4
0	3	2	3	2	3	4	5

5	4	5	4	5	4	5	6
4	3	4	3	4	5	4	5
3	4	3	4	3	4	5	4
2	3	2	3	4	3	4	5
3	2	3	2	3	4	3	4
2	1	4	3	2	3	4	5
3	4	1	2	3	4	3	4
0	3	2	3	2	3	4	5

ცხრილის შევსების პროცესში ჩვენ ვითვლიდით თუ რამდენგან დავწერეთ ესა თუ ის ციფრი ჭადრაკის დაფაზე. ამიტომ ყველა რიცხვის აჯამვა გაგვიადვილდება. საბოლოოდ, 64-ივე უჯრაში ჩაწერილი რიცხვების ჯამი არის:

$$0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 9 + 3 \cdot 20 + 4 \cdot 21 + 5 \cdot 10 + 6 \cdot 1 = 2 + 18 + 60 + 84 + 50 + 6 = 220$$

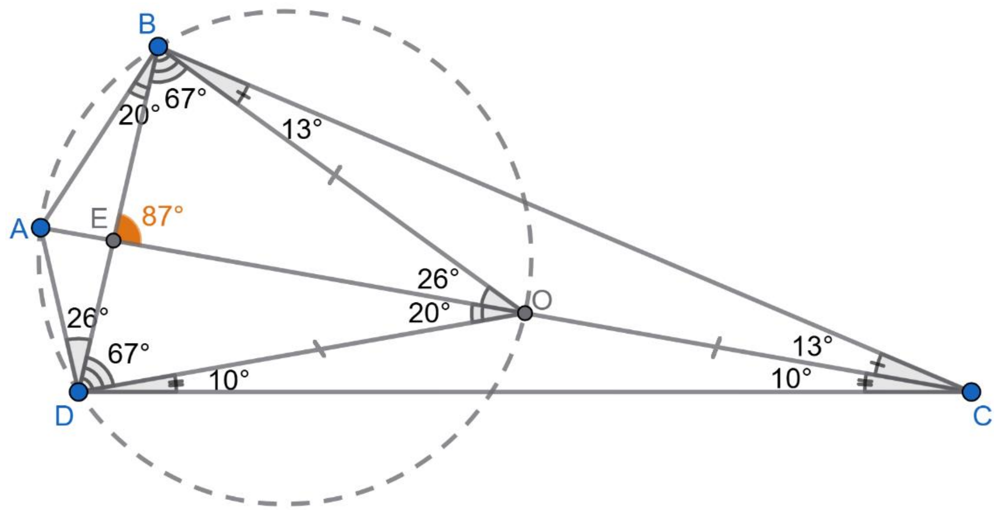
ამოცანა 2: *კუთხე დიაგონალებს შორის* ($\sqrt{3}$ ქულა)

(ამოცანის ავტორი: პაპაშვილი ნუგზარი)

მოცემულია $ABCD$ ოთხკუთხედი. ცნობილია, რომ $\angle ABD = 20°$, $\angle ADB = 26°$, $\angle BCA = 13°$ და $\angle DCA = 10°$. იპოვეთ AC და BD დიაგონალებს შორი მდებარე მახვილი კუთხის გრადუსული ზომა.

ა მ ო ხ ს ნ ა

პ ა ს უ ხ ი: 87°



განვიხილოთ AC დიაგონალისა და CD გვერდის შუამართობის გადაკვეთის O წერტილი. რადგან $OD = OC$, ამიტომ $\angle AOD = \angle ODC + \angle OCD = 10° + 10° = 20°$.

მივიღეთ, რომ $\angle ABD = \angle AOD$. ესე იგი $ABOD$ ოთხკუთხედზე შემოიხაზება წრეწირი. აქედან გამომდინარე $\angle AOB = \angle ADB = 26°$.

განვიხილოთ სამკუთხედი COB. რადგან AOB გარე კუთხე არის $26°$, ხოლო OCB შიდა კუთხე არის $13°$, ამიტომ $\angle OBC = 13°$. ესე იგი $OB = OC$. გამოვიდა, რომ OBD სამკუთხედი არის ტოლფერდა. მაშასადამე, რადგან წვეროსთან მდებარე კუთხე $\angle BOD = 26° + 20° = 46°$, ამიტომ ფუძესთან მდებარე კუთხე $\angle BDO = \frac{180° - 46°}{2} = 67°$.

ვთქვათ, E არის AC და BD დიაგონალების გადაკვეთის წერტილი. ცხადია, რომ

$$\angle BEC = \angle EDO + \angle EOD = 67° + 20° = 87°$$

ამოცანა 3: *განტოლება* ($\sqrt{5}$ ქულა)

(ამოცანის ავტორი: ბარამიძე ვახო)

იპოვეთ ყველა ისეთი მთელი რიცხვი N, რომლისთვისაც განტოლებას

$$\sqrt{x^2+x+3}+\sqrt{y^x+7xy+x+y}=x+y+N$$

აქვს ამონახსნი დადებით მთელ რიცხვებში.

ა მ ო ხ ს ნ ა

პ ა ს უ ხ ი: 5 და 8

პირველ რიგში ვაჩვენოთ, რომ თუ რაიმე დადებითი მთელი n, m და k რიცხვებისთვის სრულდება ტოლობა $\sqrt{n}+\sqrt{m}=k$, მაშინ n და m ორივე სრული კვადრატია. მართლაც, ტოლობის $\sqrt{n}=k-\sqrt{m}$ აკვადრატების შემდეგ შეგვიძლია მივიღოთ, რომ $\sqrt{m}=\frac{k^2+m-n}{2k}$. ესე იგი $\sqrt{m}$ არის რაციონალური. ანუ $m=\frac{a^2}{b^2}$, სადაც a და b ურთიერთმარტივი სრული კვადრატებია. თუმცა ჩვენ ვიცით, რომ m მთელი რიცხვია. ამიტომ $a^2=1$ და, შესაბამისად, m არის სრული კვადრატი. ანალოგიურად, n-იც არის სრული კვადრატი.

მივიღეთ, რომ როგორც x^2+x+3, ასევე, $y^x+7xy+x+y$ არის სრული კვადრატი. ცხადია, რომ $x^2<x^2+x+3<(x+2)^2$. ესე იგი $x^2+x+3=(x+1)^2=x^2+2x+1$. საიდანაც მარტივად ვღებულობთ, რომ $x=2$. ესე იგი $y^x+7xy+x+y=y^2+14y+2+y=y^2+15y+2$ და ესეც უნდა იყოს სრული კვადრატი.

ვთქვათ, $y^2+15y+2=k^2$. ტოლობის ორივე მხარე გავამრავლოთ 4-ზე და მარცხენა მხარე შევავსოთ სრულ კვადრატამდე: $4y^2+60y+8+217=4k^2+217$. მივიღეთ, რომ

$$(2y+15+2k)(2y+15-2k)=(2y+15)^2-(2k)^2=217=7\cdot 31$$

გვექნება ორი ვარიანტი. პირველი $2y+15-2k=1$ და $2y+15+2k=217$. ტოლობების შეკრებით ვიღებთ, რომ $4y+30=218$, საიდანაც $y=47$.

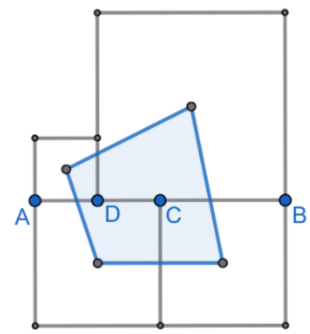
მეორე შემთხვევაში $2y+15-2k=7$ და $2y+15+2k=31$. აქაც ტოლობების შეკრებით ვიღებთ, რომ $4y+30=38$, საიდანაც $y=2$.

მივიღეთ, რომ პირობაში მოცემული ტოლობის მარცხენა მხარე მთელი გამოდის მხოლოდ ორ შემთხვევაში, როცა $(x;y)=(2;47)$ და $(x;y)=(2;2)$. პირველი შემთხვევის ჩასმით ვიღებთ, რომ $N=8$, ხოლო მეორე შემთხვევის ჩასმით ვიღებთ, რომ $N=5$.

ამოცანა 4: *ოთხკუთხედის ფართობი* ($\sqrt{7}$ ქულა)

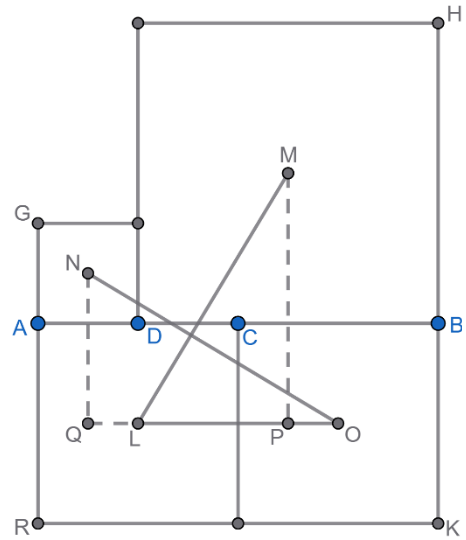
(ამოცანის ავტორი: ტურაშვილი თამარი)

ვთქვათ, C არის AB მონაკვეთის შუა წერტილი, ხოლო D არის AC მონაკვეთის შუა წერტილი. AD და DB მონაკვეთებზე AB წრფის მიმართ ერთ ნახევარსიბრტყეში აგებულია კვადრატები. ასევე, AC და CB მონაკვეთებზე AB წრფის მიმართ მეორე ნახევარსიბრტყეში აგებულია კვადრატები. (იხილეთ ნახაზი). იპოვეთ ამ ოთხი კვადრატის ცენტრებით მიღებული ოთხკუთხედის ფართობი თუ ცნობილია, რომ $AB = 1$.



ა მ ო ხ ს ნ ა

პ ა ს უ ხ ი: $\frac{17}{64}$



ამოცანის ამოხსნისთვის საჭირო წერტილები აღვნიშნოთ იმ ასოებით, რაც არის მითითებული ნახაზზე. ანუ, M, O, L და N არიან, შესაბამისი კვადრატების ცენტრები. G, R, K და H არიან კვადრატების წვეროები.

ვთქვათ, Q და P არიან, შესაბამისად, N და M წერტილების გეგმილები LP წრფეზე. ჩვენ დავამტკიცებთ, რომ MPL და OQN მართკუთხა სამკუთხედები ტოლია.

ცხადია, რომ OL წრფე პარალელურია AB წრფის და, შესაბამისად, NQ და MP წრფეები პარალელურია GR და HK წრფეების.

ცხადია, რომ $NQ = \frac{GR}{2} = \frac{AG+AR}{2} = \frac{AD+AC}{2} = \frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{8}$. ასევე, $LP = \frac{DB}{2} = \frac{DC+CB}{2} = \frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{8}$. ესე იგი $NQ = LP = \frac{3}{8}$. ცხადია, რომ $QO = \frac{AD}{2} + DC + \frac{CB}{2} = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$. ასევე, $MP = \frac{HK}{2} = \frac{HB+BK}{2} = \frac{\frac{3}{4}+\frac{1}{2}}{2} = \frac{5}{8}$. ესე იგი $QO = MP = \frac{5}{8}$. პითაგორას თეორემით: $ON = LM = \sqrt{\frac{9}{64} + \frac{25}{64}} = \frac{\sqrt{34}}{8}$.

მივიღეთ, რომ MPL და OQN მართკუთხა სამკუთხედები ტოლები არიან. აქედან გამომდინარე $\angle NOQ + \angle MLP = \angle LMP + \angle MLP = 90°$. ანუ ON და LM წრფეები ურთიერთმართობულებია. ესე იგი

$$S_{NLOM} = \frac{1}{2} \cdot ON \cdot LM = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{34}}{8} \cdot \frac{\sqrt{34}}{8} = \frac{34}{128} = \frac{17}{64}$$

ამოცანა უკავშირდება ვან ო(უ)ბელის თეორემას: https://en.wikipedia.org/wiki/Van_Aubel%27s_theorem

ამოცანა 5: *წიგნების თარო* ($\sqrt{10}$ ქულა)

(ამოცანის ავტორი: მელიქიძე ზაზა)

ლეონარდმა მუშაობა დაიწყო ბიბლიოთეკაში. მას ჩააბარეს წიგნების ერთი თარო, რომელზეც განლაგებულია 2026 წიგნი. მან გადაწყვიტა, რომ ყოველ დღე წიგნების თანმიმდევრობა გარკვეული პრინციპით შეეცვალა. თუ წიგნებს თანმიმდევრულად გადავნომრავთ ნატურალური რიცხვებით: $1, 2, 3, \dots, 2026$, მაშინ ის პირველ დღეს წიგნებს გადაალაგებს შემდეგი თანმიმდევრობით: $2026, 1, 2025, 2, 2024, 3, 2023, 4, \dots, 1015, 1012, 1014, 1013$. ის ყოველ დღე ანაცვლებს წიგნებს იგივე პრინციპით. დაადგინეთ, პირველად, მერამდენე დღის ბოლოს მიიღებს ლეონარდი წიგნების ზუსტად ისეთ თანმიმდევრობას, როგორიც იყო საწყის მომენტში, როცა მან დაიწყო მუშაობა.

ა მ ო ხ ს ნ ა

პ ა ს უ ხ ი: 96

განვიხილოთ სიმრავლე $S = \{1, 2, 3, \dots, 2026\}$ და განვიხილოთ ფუნქცია $f: S \to S$, რომელიც აღწერს წიგნების ახალ პოზიციას თანმიმდევრობის ერთჯერ შეცვლის შემდეგ. ანუ, თუ წიგნი არის x პოზიციაზე, მაშინ თანმიმდევრობის ერთჯერ შეცვლის შემდეგ, ამ წიგნის პოზიცია არის $f(x)$.

შევნიშნოთ, რომ თუ $x \leq 1013$, მაშინ $f(x) = 2x$. გავარკვიოთ რა იქნება $f(x)$, როცა $x \geq 1014$. ცხადია, რომ $f(1014) = 2025$, $f(1015) = 2023$, $f(1016) = 2021$ და ა. შ... გამოდის, რომ არგუმენტის ერთით გაზრდისას ფუნქციის მნიშვნელობა ყოველთვის ორით მცირდება. ანუ $f(x)$-ის შესაბამისი ფორმულა იქნება წრფივი, საკუთხო კოეფიციენტით (-2). ანუ $f(x) = -2x + b$. იმის გათვალისწინებით, რომ $f(1014) = 2025$, ვიღებთ: $b = 2028 + 2025 = 4053$. მივიღეთ, რომ $f(x) = 4053 - 2x$. საბოლოოდ, f ფუნქცია მთლიანად S სიმრავლეზე განისაზღვრა შემდეგნაირად:

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x \leq 1013 \\ 4053 - 2x, & x \geq 1014 \end{cases}$$

შევნიშნოთ, რომ S სიმრავლის ყოველი x ელემენტისთვის აუცილებლად სრულდება ერთერთი შემდეგი ორი სადარობიდან: $f(x) \equiv 2x \ (mod\ 4053)$ ან $f(x) \equiv -2x \ (mod\ 4053)$. ამიტომ, ნებისმიერი დადებითი მთელი k რიცხვისთვის შესრულდება ერთერთი შემდეგი ორი სადარობიდან:

$$f^{(k)}(x) \equiv 2^k \cdot x \ (mod\ 4053) \qquad \text{ან} \qquad f^{(k)}(x) \equiv -2^k \cdot x \ (mod\ 4053),$$

სადაც $f^{(k)}(x)$ აღნიშნავს $f(x)$ ფუნქციის k ოდენობის კომპოზიციას: $f^{(k)}(x) = \underbrace{f\Big(f\big(\dots f\big(f(x)\big)\dots\big)\Big)}_{k-\text{ჯერ}}$.

ცხადია, რომ $f^{(k)}(x) \in S$, ამიტომ თუ $\left(2^k \cdot x\right)$-ის 4053-ზე გაყოფისას მიღებული ნაშთი ნაკლებია 2027-ზე, მაშინ $f^{(k)}(x) \equiv 2^k \cdot x \ (mod\ 4053)$, ხოლო თუ $\left(2^k \cdot x\right)$-ის 4053-ზე გაყოფისას მიღებული ნაშთი მეტია 2026-ზე, მაშინ $f^{(k)}(x) \equiv -2^k \cdot x \ (mod\ 4053)$. ასევე, ცხადია, რომ ეს ნაშთი ვერასოდეს იქნება ნული, რადგან 2^k და 4053 ურთიერთმარტივია და $1 \leq x < 4053$.

ვთქვათ, მე-k დღის ბოლოს ლეონარდი იღებს წიგნების საწყის თანმიმდევრობას. მაშინ ცხადია, რომ $f^{(k)}(x) = x$ ნებისმიერი x ელემენტისთვის S სიმრავლიდან. აქედან გამომდინარე გვექნება, რომ $x \equiv 2^k \cdot x \ (mod\ 4053)$ ან $x \equiv -2^k \cdot x \ (mod\ 4053)$ ყოველი x-ისთვის S-იდან. სხვანაირად რომ ვთქვათ: ყოველი x-ისთვის S-იდან ან $\left(2^k - 1\right)x$ იყოფა 4053-ზე, ან $\left(2^k + 1\right)x$ იყოფა 4053-ზე. ცხადია, მხოლოდ $x = 1$ შემთხვევის განხილვაც კი საკმარისია დავასკვნათ, რომ $\left(2^k - 1\right)$ იყოფა 4053-ზე ან $\left(2^k + 1\right)$ იყოფა 4053-ზე. მაგრამ ორის ხარისხების შვიდზე გაყოფისა მიღებული შესაძლო ნაშთები არის მხოლოდ 2; 4 და 1, ამიტომ $(2^m + 1)$ ვერ გაიყოფა 4053-ზე, რადგან 4053 არის 7-ის ჯერადი. ესე იგი $\left(2^k - 1\right)$ უნდა იყოფოდეს 4053-ზე.

ასევე, ცხადია, რომ თუ რაიმე დადებითი მთელი k რიცხვისთვის $\left(2^k - 1\right)$ იყოფა 4053-ზე, მაშინ $x \equiv 2^k \cdot x \ (mod\ 4053)$ ყოველი x რიცხვისთვის S სიმრავლიდან. ეს კი ნიშნავს, რომ მე-k დღის ბოლოს ლეონარდი მიიღებს წიგნების საწყის თანმიმდევრობას. მივიღეთ, რომ მე-k დღის ბოლოს ლეონარდი იღებს წიგნების საწყის თანმიმდევრობას მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\left(2^k - 1\right)$ იყოფა 4053-ზე.

ვთქვათ, საძიებელი რიცხვი არის m. ანუ მე-m დღის ბოლოს ლეონარდი პირველად იღებს წიგნების საწყის თანმიმდევრობას. ესე იგი ჩვენ ვეძებთ ისეთ მინიმალურ დადებით მთელ m რიცხვს, რომლისთვისაც $(2^m - 1)$ იყოფა 4053-ზე. ესე იგი, ჩვენ ვეძებთ 2-ის მაჩვენებელს 4053-ის მიმართ. $m = ord_{4053}(2)$. ჩვენ დავამტკიცებთ, რომ $ord_{4053}(2) = 96$.

დავშალოთ 4053 მარტივ მამრავლებად. $4053 = 3 \cdot 7 \cdot 193$. ლეჟანდრის სიმბოლოს დათვლით https://en.wikipedia.org/wiki/Legendre_symbol და ოილერის კრიტერიუმის გათვალის-წინებით https://en.wikipedia.org/wiki/Euler%27s_criterion, შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ

$$2^{96} \equiv \left(\frac{2}{193}\right) = (-1)^{\frac{193^2-1}{8}} = 1 \ (mod\ 193)$$

ანუ მივიღეთ, რომ $(2^{96} - 1)$ იყოფა 193-ზე. ასევე ცხადია, რომ $2^{96} = 4^{48} \equiv 1^{48} = 1 \ (mod\ 3)$ და $2^{96} = 8^{32} \equiv 1^{32} = 1 \ (mod\ 7)$. მივიღეთ, რომ $(2^{96} - 1)$ იყოფა 3-ზეც, 7-ზეც და 193-ზეც. მაშასადამე $(2^{96} - 1)$ იყოფა 4053-ზე. ახლა ვაჩვენოთ, რომ არ არსებობს უფრო პატარა დადებითი მთელი რიცხვი $d < 96$, რომლისთვისაც $\left(2^d - 1\right)$ იყოფა 4053-ზე.

როგორც ცნობილია, რადგან $(2^{96} - 1)$ იყოფა 4053-ზე, მაჩვენებელი, ანუ $ord_{4053}(2)$, უნდა იყოს 96-ის გამყოფი. თუ $ord_{4053}(2) < 96$, მაშინ ის იქნება ან 48-ის გამყოფი ან 32-ის გამყოფი. ანუ ან $(2^{48} - 1)$ უნდა იყოფოდეს 4053-ზე, ან $(2^{32} - 1)$ უნდა იყოფოდეს 4053-ზე. ეს უკანასკნელი შეუძლიებელია, რადგან $(2^{32} - 1)$ არ იყოფა 7-ზე. ვაჩვენოთ, რომ $(2^{48} - 1)$ არ იყოფა 193-ზე.

$$2^{48} = 256^6 \equiv 63^6 = 189^4 \cdot 49 \equiv (-4)^4 \cdot 49 = 64 \cdot 196 \equiv 64 \cdot 3 \equiv -1 \ (mod\ 193)$$

მივიღეთ, რომ $(2^{48} + 1)$ იყოფა 193-ზე და, შესაბამისად, $(2^{48} - 1)$ არ იყოფა 193-ზე. ესე იგი $ord_{4053}(2) = 96$. ანუ 96-ე დღის ბოლოს ლეონარდი პირველად მიიღებს წიგნების საწყის თანმიმდევრობას.