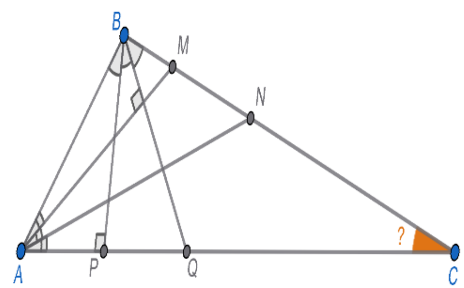
ოილერის ოლიმპიადა – 2026. პირველი ტური. (მეორე სესია)

ა მ ო ხ ს ნ ე ბ ი

ამოცანა 6: *ტრისექტრისები* ($\sqrt{2}$ ქულა)

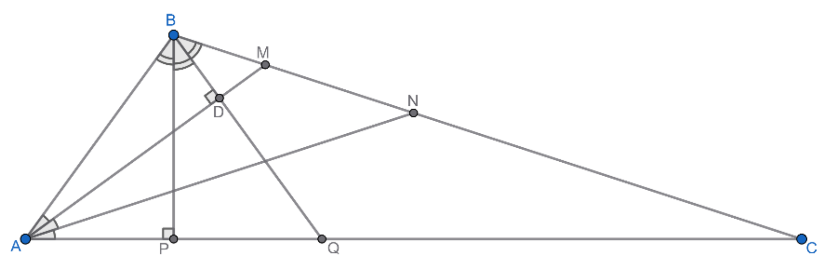
(ამოცანის ავტორი: უგულავა ზურაბი)

ABC სამკუთხედში A და B წვეროებიდან გავლებულია AM, AN, BP და BQ ტრისექტრისები ისე, როგორც ნაჩვენებია ნახაზზე, რომელიც ზუსტ ზომებს არ ინარჩუნებს. აღმოჩნდა, რომ $AM \perp BQ$ და $AC \perp BP$. იპოვეთ C კუთხის გრადუსული ზომა. (ტრისექტრისა კუთხეს სამ ტოლ ნაწილად ჰყოფს).



ა მ ო ხ ს ნ ა:

პ ა ს უ ხ ი: 18°



შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$\angle BAM = \angle MAN = \angle NAC \equiv \alpha \qquad \text{და} \qquad \angle ABP = \angle PBQ = \angle QBC \equiv \beta$$

ვთქვათ, D არის AM და BQ ტრისექტრისების გადაკვეთის წერტილი. ABP მართკუთხა სამკუთხედიდან გამომდინარეობს, რომ $3\alpha + \beta = 90°$, საიდანაც $\beta = 90° - 3\alpha$, ხოლო ABD მართკუთხა სამკუთხედიდან გამომდინარეობს, რომ $\alpha + 2\beta = 90°$. ანუ $\alpha + 2(90° - 3\alpha) = 90°$. მიღებული წრფივი განტოლების ამოხსნით ვიღებთ, რომ $\alpha = 18°$. ხოლო აქედან კი ვიღებთ, რომ $\beta = 90° - 3\alpha = 36°$. ესე იგი $\angle BAC = 3 \cdot 18° = 54°$ და $\angle ABC = 3 \cdot 36° = 108°$. შესაბამისად, $\angle ACB = 180° - 54° - 108° = 18°$.

თავისუფალი უნივერსიტეტი

ამოცანა 7: *მოდულების ჯამი* (2 ქულა)

(ამოცანის ავტორი: პაპაშვილი ნუგზარი)

მოცემულია დადებითი მთელი რიცხვი n. იპოვეთ შემდეგი ჯამი

$$\left|\sqrt{2026}-1\right|+\left|\sqrt{2026}-2\right|+\left|\sqrt{2026}-3\right|+\ \dots\dots\dots\ +\left|\sqrt{2026}-n\right|$$

თუ ცნობილია, რომ ის მთელი რიცხვია.

ა მ ო ხ ს ნ ა

პ ა ს უ ხ ი: 2025

ცხადია, რომ $\sqrt{2026}>\sqrt{2025}=45$. ესე იგი, ნებისმიერი დადებითი მთელი x რიცხვისთვის სამართლიანი იქნება შემდეგი ტოლობა:

$$\left|\sqrt{2026}-x\right|=\begin{cases}\sqrt{2026}-x, & \textbf{როცა } x\le 45\\ x-\sqrt{2026}, & \textbf{როცა } x\ge 46\end{cases}$$

იმისათვის რომ საძიებელი ჯამი მთელი რიცხვი გამოვიდეს აუცილებელია, რომ $\sqrt{2026}$-ის ტოლი წევრები სრულად გაბათილდეს. ანუ, პირველ 45 შესაკრებში მიღებულ $45\cdot\sqrt{2026}$ რიცხვს სჭირდება კიდევ 45 შესაკრები, სადაც ჯამურად მიიღება $-45\cdot\sqrt{2026}$, და ამით მოხდება ირაციონალური წევრების გაბათილება. მივიღეთ, რომ ერთადერთი დადებითი მთელი რიცხვი n, რომლისთვისაც საძიებელი ჯამი მთელი რიცხვი გამოდის, არის $n=90$. აქედან გამომდინარე საძიებელი ჯამი გამოითვლება შემდეგნაირად:

$$\sqrt{2026}-1+\sqrt{2026}-2+\dots+\sqrt{2026}-45+46-\sqrt{2026}+47-\sqrt{2026}+\dots+90-\sqrt{2026}=$$
$$=46-1+47-2+\dots+90-45=\underbrace{45+45+\dots+45}_{45}=45\cdot45=2025$$

ამოცანა 8: *კაპრეკარის რიცხვები* ($\sqrt{6}$ ქულა)

(ამოცანის ავტორი: ჩიტიშვილი ლია)

ნატურალურ რიცხვთა წყვილს ვუწოდოთ *კაპრეკარის,* თუ მათი ჯამის კვადრატი ამავე რიცხვების შეერთებით მიღებული რიცხვის ტოლია. მაგალითად, 20 და 25 კაპრეკარის წყვილია, რადგან $(20+25)^2 = 2025$. იპოვეთ სამნიშნა ნატურალურ რიცხვთა კაპრეკარის ყველა წყვილი.

ა მ ო ხ ს ნ ა

პ ა ს უ ხ ი: $(494; 209)$

ვთქვათ, საძიებელი სამნიშნა რიცხვებია n და m. პირობის თანახმად გვექნება შემდეგი ტოლობა:

$$(n+m)^2 = 1000n + m$$

ორივე მხარეს დავაკლოთ $(n+m)$ და მარცხენა მხარეში გავიტანოთ ფრჩხილებს გარეთ. მივიღებთ:

$$(n+m)(n+m-1) = 999n$$

შევნიშნოთ, რომ $n+m-1 \geq n+100-1 > n$, ამიტომ $n+m < 999$. აქედან გამომდინარე ვერც $(n+m)$ და ვერც $(n+m-1)$ ვერ იქნება 999-ის ჯერადი.

ცხადია, რომ $(n+m)$ და $(n+m-1)$ ორი მომდევნო და, შესაბამისად, ურთიერთმარტივი ნატურალური რიცხვია. ამიტომ, რადგან $999 = 27 \cdot 37$, $(n+m)$ და $(n+m-1)$ რიცხვებს შორის ერთერთი უნდა იყოს 27-ის ჯერადი, ხოლო მეორე უნდა იყოს 37-ის ჯერადი. როგორც უკვე გავარკვიეთ მხოლოდ ერთ იყოს ორივე რიცხვის ჯერადი ეს შეუძლებელია.

განვიხილოთ პირველი შემთხვევა:

პირველი შემთხვევა: $n+m = 27k$ და $n+m-1 = 37l$

რადგან $n+m < 999$, ამიტომ $k < 37$ და $l < 27$.

დავაკვირდეთ შემდეგ სადარობას:

$$27k = 37l + 1 \equiv 10l + 1 \equiv 0 \ (mod\ 27)$$

რიცხვი $(10l+1)$ ბოლოვდება 1-ით და თან არის 27-ის ჯერადი. ცხადია, რომ 27 უნდა გამრავლდეს 3-ით დაბოლოვებულ რიცხვზე.

თუ $10l+1=27\cdot 3$, მაშინ $l=8$. საიდანაც $n+m-1=37l=296$. ანუ $n+m=297$. პირობიდან გამომდინარე შეგვიძლია დავწეროთ: $1000n+m=(n+m)^2=297^2=88209$. აქედან გამოდის, რომ რიცხვთა წყვილი $(88;209)$ არის კაპრეკარის, მაგრამ ჩვენ ვეძებთ სამნიშნა რიცხვთა წყვილს, ამიტომ ეს წყვილი არ გვაწყობს.

თუ $10l+1=27\cdot 13$, მაშინ $l=35$. თუმცა ჩვენ ვიცით, რომ $l<27$ და აქ პასუხს ვერ მივიღებთ. ხოლო, როცა $10l+1=27\cdot 23$, ცხადია, რომ კიდევ უფრო დიდ l-ს მივიღებთ. გამოვიდა, რომ პირველ შემთხვევაში სამნიშნა რიცხვთა კაპრეკარის წყვილი არ არსებობს.

ახლა განვიხილოთ მეორე შემთხვევა.

მეორე შემთხვევა: $n+m=37k$ და $n+m-1=27l$

ამჯერადაც, ცხადია, გვექნება შემდეგი: რადგან $n+m<999$, ამიტომ $k<27$ და $l<37$. დავაკვირდეთ შემდეგ სადარობას:

$$27l=37k-1\equiv 10k-1\equiv 0\ (mod\ 27)$$

რიცხვი $(10k-1)$ ბოლოვდება 9-ით და თან არის 27-ის ჯერადი. ცხადია, რომ 27 უნდა გამრავლდეს 7-ით დაბოლოვებულ რიცხვზე.

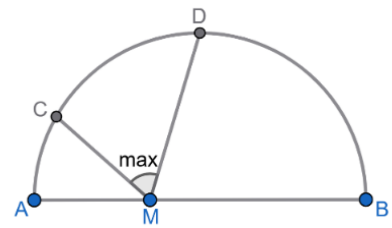
თუ $10k-1=27\cdot 7$, მაშინ $k=19$. საიდანაც ვიღებთ, რომ $n+m=37k=703$. პირობიდან გამომდინარე შეგვიძლია დავწეროთ ტოლობა: $1000n+m=(n+m)^2=703^2=494209$. აქედან გამოდის, რომ რიცხვთა წყვილი $(494;209)$ არის კაპრეკარის. ვიპოვეთ სამნიშნა რიცხვთა ერთი ასეთი წყვილი, თუმცა ვაგრძელებთ ძებნას.

თუ $10k-1=27\cdot 17$, მაშინ $k=46$. თუმცა ჩვენ ვიცით, რომ $k<37$ და აქ პასუხს ვერ მივიღებთ. ხოლო, როცა $10k-1=27\cdot 27$, ცხადია, რომ კიდევ უფრო დიდ k-ს მივიღებთ. გამოვიდა, რომ მეორე შემთხვევაში სამნიშნა რიცხვთა კაპრეკარის მხოლოდ ერთი წყვილი არსებობს. ეს წყვილია $(494;209)$.

ამოცანა 9: *მაქსიმალური კუთხე* ($\sqrt{8}$ ქულა)

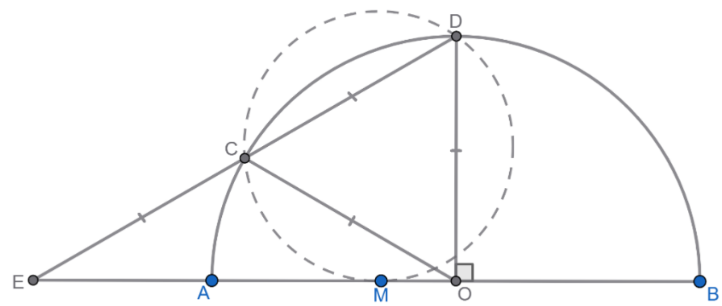
(ამოცანის ავტორი: გვარამია ანდრია)

AB დიამეტრიან ნახევარწრეწირზე აღებულია C და D წერტილები, რომლებიც ნახევარწრეწირს ჰყოფენ შემდეგი თანაფარდობით: $\overset{\frown}{AC}:\overset{\frown}{CD}:\overset{\frown}{DB} = 1:2:3$. (იხილეთ ნახაზი). AB დიამეტრზე აღებულია ის M წერტილი, რომლისთვისაც CMD კუთხის გრადუსული ზომა არის მაქსიმალური. იპოვეთ შეფარდება: $\frac{AM}{MB}$.



ა მ ო ხ ს ნ ა

პ ა ს უ ხ ი: $\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}$



ვთქვათ, O არის ნახევარწრეწირის ცენტრი, ხოლო E არის DC და BA სხივების გადაკვეთის წერტილი.

ცხადია, რომ $\overset{\frown}{AC} = 30°$; $\overset{\frown}{CD} = 60°$ და $\overset{\frown}{DB} = 90°$. შესაბამისად, $\angle AOC = 30°$; $\angle COD = 60°$ და $\angle DOB = 90°$. რადგან $OC = OD$ და $\angle COD = 60°$, ამიტომ COD სამკუთხედი ტოლგვერდაა. ესე იგი $CD = OC = OD$. რადგან $\angle CEO = 90° - 60° = 30°$, ამიტომ $CE = CO$. მივიღეთ, რომ C წერტილი არის CE მონაკვეთის შუა წერტილი და $CE = CD = OC = OD = OA = OD$. ეს ექვსივე მონაკვეთი არის ნახევარწრეწირის რადიუსის ტოლი, აღვნიშნოთ ეს რადიუსი r-ით.

პითაგორას თეორემიდან გამომდინარე გვექნება, რომ $EO^2 = ED^2 - OD^2 = 4r^2 - r^2 = 3r^2$. ანუ $EO = \sqrt{3}r$ და, შესაბამისად, $EA = EO - OA = \sqrt{3}r - r = (\sqrt{3}-1)r$.

დავუბრუნდეთ M წერტილს. ცხადია, ის უნდა იყოს იმ წრეწირის AB წრფესთან შეხების წერტილი, რომელიც გადის C და D წერტილებზე და ეხება AB წრფეს, რადგან ამ შემთხვევაში AB წრფის ყველა სხვა წერტილი აღმოჩნდება წრეწირის გარეთ და, შესაბამისად, CMD კუთხე გამოვა შესაძლო მაქსიმალური ზომის, როგორც ამოცანის პირობაშია.

CMD სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირისადმი გავლებული მხებისა და მკვეთის თვისებიდან გვექნება შემდეგი ტოლობა: $EM^2 = EC \cdot ED = r \cdot 2r$. ესე იგი $EM = \sqrt{2}r$ და, აქედან გამომდინარე, $AM = EM - EA = \sqrt{2}r - (\sqrt{3}-1)r = (1+\sqrt{2}-\sqrt{3})r$. ვიპოვოთ MB მონაკვეთის სიგრძეც r-ის საშუალებით: $MB = AB - AM = 2r - (1+\sqrt{2}-\sqrt{3})r = (1-\sqrt{2}+\sqrt{3})r$. საბოლოოდ მივიღეთ:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})r}{(1-\sqrt{2}+\sqrt{3})r} = \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}$$

ამოცანა 10: *დილერი და ლეონარდი* ($\sqrt{11}$ ქულა)

(ამოცანის ავტორი: თოლორაია თეიმურაზი)

ლეონარდს თამაშის დასაწყისში აქვს 1 ლარი, ხოლო დილერს აქვს 26 წითელი და 26 შავი კარტი. ლეონარდი და დილერი მონაცვლეობით იმეორებენ შემდეგ ქმედებებს: ჯერ ლეონარდი დებს თავისი თანხის რაღაც ნაწილს, ამბობს ფერს და შემდეგ დილერი ატრიალებს ერთ კარტს. თუ ლეონარდმა გამოიცნო კარტის ფერი, მაშინ ის მოიგებს იმდენივე თანხას რამდენიც დადო, წინააღმდეგ შემთხვევაში ის აგებს დადებულ თანხას. თამაში გრძელდება იქამდე სანამ არ გამოელევა ლეონარდს თანხა ან დილერს კარტი. ცნობილია, რომ დილერი არ არის კეთილსინდისიერი და ბოროტად არის განწყობილი ლეონარდის მიმართ. ანუ ის მის ხელში არსებული კარტებიდან ყოველთვის ატრიალებს იმას, რომელიც ყველაზე მეტად ამცირებს თამაშის ბოლოს ლეონარდის მიერ მოგროვებული თანხის ოდენობას. დაადგინეთ, გარანტირებულად რა მაქსიმალური ოდენობის თანხა ექნება ლეონარდს თამაშის ბოლოს. (იგულისხმება, რომ თუ ლეონარდს აქვს $x > 0$ ლარი, მაშინ მას შეუძლია დადოს y ოდენობის თანხა, სადაც y არის ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვი, რომლისთვისაც $0 \le y \le x$.)

ა მ ო ხ ს ნ ა

პ ა ს უ ხ ი: $\frac{2^{52}}{\binom{52}{26}} = \frac{2^{52} \cdot 26! \cdot 26!}{52!} \approx 9{,}08$

ვაჩვენოთ, რომ ლეონარდს თამაშის ბოლოს გარანტირებულად ექნება $\frac{2^{52}}{\binom{52}{26}}$ ოდენობის თანხა და ამაზე მეტი თანხის გარანტირებულად მოგროვებას ვერ შეძლებს.

ვთქვათ, $M(b,r)$ აღნიშნავს თანხის იმ მაქსიმალურ ოდენობას, რომელიც შესაძლებელია, რომ გარანტირებულად მოაგროვოს ლეონარდმა, მაშინ როცა დილერს ხელში აქვს b შავი და r წითელი კარტი, ხოლო თვითონ თავიდან აქვს 1 ლარი. ჩვენ დავასაბუთებთ, რომ $M(b,r) = \frac{2^{b+r}}{\binom{b+r}{r}}$.

შევნიშნოთ, რომ საბოლოოდ დაგროვებული თანხის ოდენობა პირდაპირპროპორციულია საწყისი თანხის. ანუ, თუ ლეონარდს რაღაც მომენტში აქვს L თანხა, ხოლო დილერს აქვს b შავი და r წითელი კარტი, მაშინ ლეონარდი საბოლოოდ გარანტირებულად შეძლებს მაქსიმუმ $L \cdot M(b,r)$ თანხის მოგროვებას.

ცხადია, რომ თუ $b = 0$, მაშინ ლეონარდი ყოველთვის მაქსიმალურ ფსონს გააკეთებს და გაიორმაგებს თანხას r-ჯერ, ანუ დააგროვებს 2^r ლარს. ანალოგიურად, თუ $r = 0$, მაშინ ის დააგროვებს 2^b ლარს. ორივე შემთხვევაში ცხადია, რომ ტოლობა $M(b,r) = \frac{2^{b+r}}{\binom{b+r}{r}}$ სამართლიანია.

ვთქვათ, ლეონარდს კონკრეტულ მომენტში აქვს L თანხა, ხოლო დილერს ხელში აქვს b შავი და r წითელი კარტი. ცხადია, რომ ლეონარდის მიერ x თანხის დადება შავზე შეგვიძლია აღვიქვათ, როგორც $(-x)$ ლარის დადება წითელზე. ორივე სიტუაციაში შედეგი ერთი და იგივე იქნება. ამიტომ, წარმოვიდგინოთ, რომ ლეონარდი ირჩევს ნებისმიერ ნამდვილ f რიცხვს $[-1;\ 1]$ ინტერვალიდან და $L \cdot f$ ოდენობის ფსონს აკეთებს შავ კარტზე. თუ დილერი ამოატრიალებს შავ კარტს, მაშინ ლეონარდის თანხა გახდება $L \cdot (1+f)$ და ის თამაშის დასრულების მომენტში გარანტირებულად მოახერხებს მაქსიმუმ $L \cdot (1+f) \cdot M(b-1,r)$ თანხის მოგროვებას, ხოლო თუ დილერი წითელ კარტს ამოატრიალებს, მაშინ ლეონარდის თანხა გახდება $L \cdot (1-f)$ და ის საბოლოოდ მოახერხებს მაქსიმუმ $L \cdot (1-f) \cdot M(b,r-1)$ თანხის მოგროვებას.

როგორც პირობიდან არის ცნობილი, დილერი ყოველთვის ატრიალებს იმ კარტს, რომელიც ლეონარდის მიერ საბოლოოდ მოგროვებულ თანხას უფრო ნაკლებს გამოიყვანს. ანუ გამოდის, რომ ლეონარდი შესაძლო საბოლოო შედეგებს შორის, რომლებიც არიან $L \cdot (1+f) \cdot M(b-1,r)$ და $L \cdot (1-f) \cdot M(b,r-1)$, მიიღებს უფრო მცირეს. ამიტომ ლეონარდმა უნდა შეარჩიოს ისეთი f, რომლისთვისაც ამ ორ რიცხვს შორის უმცირესი იქნება რაც შეიძლება დიდი. ცხადია, რომ f-ის მიმართ ორივე რიცხვი არის წრფივი გამოსახულება, პირველი აღმავალი წრფეა, ხოლო მეორე - დაღმავალი. ამიტომ ლეონარდისთვის ოპტიმალური f იქნება მათი გადაკვეთის წერტილის შესაბამისი რიცხვი. ამიტომ ლეონარდმა f რიცხვი ყველა ეტაპზე ისე უნდა შეარჩიოს, რომ შესრულდეს შემდეგი ტოლობა:

$$L \cdot (1+f) \cdot M(b-1,r) = L \cdot (1-f) \cdot M(b,r-1)$$

აქედან კი ვასკვნით, რომ

$$f = \frac{M(b,r-1) - M(b-1,r)}{M(b,r-1) + M(b-1,r)}$$

მიღებული წილადი შევიტანოთ f-ის ნაცვლად ტოლობაში: $L \cdot M(b,r) = L \cdot (1+f) \cdot M(b-1,r)$.

$$M(b,r) = \left(1 + \frac{M(b,r-1) - M(b-1,r)}{M(b,r-1) + M(b-1,r)}\right) \cdot M(b-1,r) = \frac{2 \cdot M(b,r-1) \cdot M(b-1,r)}{M(b,r-1) + M(b-1,r)}$$

აქედან კი ვიღებთ, რომ ნებისმიერი დადებითი მთელი b და r რიცხვებისთვის სამართლიანია შემდეგი ტოლობა:

$$\frac{2}{M(b,r)} = \frac{1}{M(b,r-1)} + \frac{1}{M(b-1,r)}$$

ყოველი არაუარყოფითი n და m რიცხვებისთვის $(n \geq m)$ შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნა:

$$\frac{2^n}{M(m,\ n-m)} \equiv C(n,m)$$

მიღებული ტოლობის და აღნიშვნის გათვალისწინებით, ცხადია, გვექნება შემდეგი ტოლობა:

$$C(n,m) = C(n-1,m-1) + C(n-1,m)$$

ჩვენ ვაჩვენებთ, რომ ამ რეკურენტული დამოკიდებულების დამაკმაყოფილებელი სიდიდე, შესაბამისი საწყისი პირობებით, იქნება ნიუტონის ბინომის კოეფიციენტი, ანუ $C(n,m)=\binom{n}{m}$. მართლაც, $C(n,0)=\frac{2^n}{M(0,n)}=\frac{2^n}{2^n}=1=\binom{n}{0}$ და $C(n,n)=\frac{2^n}{M(n,0)}=\frac{2^n}{2^n}=1=\binom{n}{n}$.

მივიღეთ, რომ $C(n,m)$ რიცხვები აკმაყოფილებენ პასკალის იგივეობას და მათ აქვთ პასკალის სამკუთხედისათვის საჭირო სასაზღვრო მონაცემები (https://en.wikipedia.org/wiki/Pascal%27s_triangle). აქედან გამომდინარე, რადგან პასკალის სამკუთხედის შიდა რიცხვები ცალსახად განისაზღვრება გვერდითი რიცხვებით, ანუ 1-იანების საშუალებით, გამოდის, რომ $C(n,m)=\binom{n}{m}$, ყოველი არაუარყოფითი მთელი $n\geq m$ რიცხვებისთვის.

საბოლოოდ მივიღეთ, რომ

$$M(b,r)=\frac{2^{b+r}}{C(b+r,r)}=\frac{2^{b+r}}{\binom{b+r}{r}}$$

ნებისმიერი არაუარყოფითი მთელი b და r რიცხვებისთვის. ესე იგი ლეონარდი გარანტირებულად შეძლებს მაქსიმუმ $\frac{2^{52}}{\binom{52}{26}}$ ოდენობის თანხის მოგროვებას.