



თილერის ოლიმპიადა – 2025. პირველი ტური. (პირველი სესია)

ა მ თ ხ ს ნ ე ბ ი

ამოცანა 1: სამი სამნიშნა რიცხვი (1 ქულა)

(ამოცანის ავტორი: არაბიძე გიორგი)

ლენარდმა დაფაზე დაწერა სამი სამნიშნა ნატურალური რიცხვი, რომელთა ჯამი შეადგენს 1000-ს. ცნობილია, რომ დაფაზე დაწერილი ცხრავე ციფრი განსხვავებულია. დაადგინეთ, რომელი ციფრი არ წერია დაფაზე.

ა მ თ ხ ს ნ ა:

პ ა ს უ ხ ი: 8

როგორც ცნობილია, რიცხვი და მისი ციფრთა ჯამი 9-ზე გაყოფისას ერთი და იგივე ნაშთს გვაძლევენ. ამიტომ ლენარდის მიერ დაწერილი სამი რიცხვის ჯამი, რაც 1000-ის ტოლია, 9-ზე გაყოფისას ნაშთში მოგვცემს იგივეს, რასაც დაფაზე დაწერილი ცხრავე ციფრის ჯამი. ეს ნაშთი კი არის 1. ათივე ციფრის ჯამი 45-ის ტოლია. ესე იგი ჩვენ არ უნდა გამოვიყენოთ ციფრი 8, რომ დანარჩენმა ცხრა ციფრის ჯამმა 9-ზე გაყოფისას ნაშთში მოგვცეს 1. მართლაც, 8-ის გარდა დანარჩენი ცხრა ციფრით შეგვიძლია შევადგინოთ სამი სამნიშნა რიცხვი, რომელთა ჯამი 1000-ის ტოლია. მაგალითად: $479 + 315 + 206 = 1000$.



ამოცანა 2: პალინდრომი ($\sqrt{3}$ ქულა)

(ამოცანის ავტორი: ტურაშვილი თამარი)

იპოვეთ ყველა ისეთი ხუთნიშნა ნატურალური რიცხვი, რომელსაც აქვს შემდეგი სამი თვისება:

1. ის არის პალინდრომი, ანუ მისი ციფრების უკუღმა დალაგებით იგივე რიცხვი მიიღება;
2. მისი შუა ციფრი ორჯერ მეტია პირველ ციფრზე;
3. ის წარმოადგენს რაიმე ნატურალური რიცხვის კვადრატს.

ა მ თ ხ ნ ა

პ ა ს უ ხ ი: 10201 და 40804

ვთქვათ, საძიებელი რიცხვი არის $\overline{abcba}$, სადაც $c = 2a$. ციფრთა თანრიგების მიხედვით გაშლით მივიღებთ:

$$\overline{abcba} = 10000a + 1000b + 100 \cdot 2a + 10b + a = 10201a + 1010b = 101(101a + 10b)$$

როგორც გამოჩნდა საძიებელი რიცხვი არის 101-ის ჯერადი. რადგან სრული კვადრატია, ის უნდა იყოფოდეს 101^2 -ზე. ესე იგი $101a + 10b$ იყოფა 101-ზე. ანუ $10b$ იყოფა 101-ზე. მივიღეთ, რომ b იყოფა 101-ზე. ასეთი ციფრი არის მხოლოდ ნული, $b = 0$. გამოგვივიდა, რომ $\overline{abcba} = 101^2 a$. ესე იგი ციფრი a -ც სრული კვადრატია. ანუ $a = 1$ ან $a = 4$. $a = 9$ არ გვანყობს, რადგან მაშინ c არ გამოდის ციფრი. მივიღეთ მხოლოდ ორი ასეთი რიცხვი: 10201 და 40804



ამოცანა 3: წილადების ჯამი ($\sqrt{5}$ ქულა)

(ამოცანის ავტორი: Prudencio Guerrero Fernández)

გამოთვალეთ შემდეგი ჯამი:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4} + \dots + \frac{1}{1+2+3+4+\dots+2025}$$

ა მ ო ხ ს ნ ა

პ ა ს უ ხ ი: $1 \frac{1012}{1013}$

ნებისმიერი ნატურალური n რიცხვისთვის სამართლიანია ტოლობა: $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
ამიტომ

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \dots + \frac{1}{1+2+3+\dots+2025} = \frac{2}{1 \cdot 2} + \frac{2}{2 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{2}{2025 \cdot 2026}$$

ასევე, ნებისმიერი ნატურალური n -ისთვის, სამართლიანია ტოლობა: $\frac{2}{n(n+1)} = \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1}$. აქედან
გამომდინარე, გვექნება ტოლობა:

$$\frac{2}{1 \cdot 2} + \frac{2}{2 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{2}{2025 \cdot 2026} = \frac{2}{1} - \frac{2}{2} + \frac{2}{2} - \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{2}{4} + \dots + \frac{2}{2025} - \frac{2}{2026}$$

მიღებულ ჯამში პირველი და ბოლო წევრის გარდა ყველა გაბათილდება და მივიღებთ:

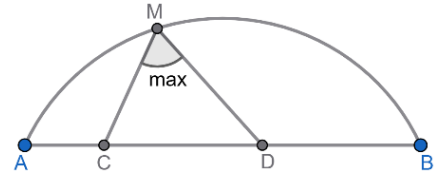
$$2 - \frac{2}{2026} = 2 - \frac{1}{1013} = 1 \frac{1012}{1013}$$



ამოცანა 4: მაქსიმალური კუთხე ($\sqrt{7}$ ქულა)

(ამოცანის ავტორი: გვარამია ანდრია)

მოცემულია ნებისმიერი ზომის AB რკალი. AB ქორდაზე აღებულია ისეთი C და D წერტილები, რომ სრულდება ტოლობა: $CD = DB = 2 \cdot AC$. AB რკალზე აღებულია ის M წერტილი, რომლისთვისაც CMD კუთხის გრადუსული ზომა არის მაქსიმალური. იპოვეთ შეფარდება: $\frac{CM}{MD}$.



ა მ ო ხ ს ნ ა

პ ა ს უ ხ ი: $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

ვაჩვენოთ, რომ CDM სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირი ეხება AB რკალს. დავუშვათ საწინააღმდეგო. ვთქვათ CDM სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირი AB რკალს კვეთს განსხვავებულ M და M' წერტილებში, მაშინ, თუ შევარჩევთ ნებისმიერ X წერტილს AB რკალის იმ ნაწილზე, რომელიც მოთავსებული M და M' წერტილებს შორის, ცხადია, რომ ეს X წერტილი აღმოჩნდება CDM სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის შიგნით. ამიტომ გამოვა, რომ $\angle CMD < \angle CXM$. რაც ეწინააღმდეგება პირობას, რომ $\angle CMD$ არის მაქსიმალური. ესე იგი CDM სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირი ეხება AB რკალს.

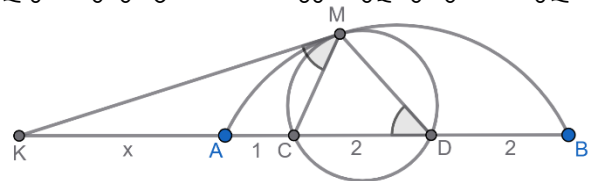
განვიხილოთ M წერტილში გავლებული მხეებისა და AB წფრის გადაკვეთის K წერტილი.

(რადგან $AC \neq DB$ ეს წრეწრები იკვეთება!) ცხადია, რომ ნახაზის პროპორციული გაზრდა ან შემცირება საძიებელ შეფარდებას არ შეცვლის, ამიტომ შეგვიძლია მივიჩნიოთ, რომ $AC = 1$. შესაბამისად $CD = DB = 2$. ხოლო AK მონაკვეთის სიგრძე აღვნიშნოთ x -ით. შევნიშნოთ, რომ $KM^2 = KA \cdot KB$ და $KM^2 = KC \cdot KB$. ანუ $KA \cdot KB = KC \cdot KB$. მივიღეთ შემდეგი ტოლობა:

$$x(x + 5) = (x + 1)(x + 3)$$

გავამარტივოთ ორივე მხარე. $x^2 + 5x = x^2 + 4x + 3$. საიდანაც $x = 3$. მივიღეთ, რომ $KM^2 = 3 \cdot 8$. ანუ $KM = \sqrt{24}$. ასევე, რადგან KMC და KDC სამკუთხედები მსგავსია გვექნება შემდეგი:

$$\frac{CM}{MD} = \frac{KM}{KD} = \frac{\sqrt{24}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$





ამოცანა 5: $(m + n)$ -ის უმცირესი მნიშვნელობა ($\sqrt{10}$ ქულა)

(ამოცანის ავტორი: Prudencio Guerrero Fernández)

იპოვეთ $(m + n)$ -ის უმცირესი შესაძლო მნიშვნელობა, სადაც m და n დადებითი მთელი რიცხვებია, რომელთათვისაც $m + 2025n$ იყოფა 2023-ზე და $m + 2023n$ იყოფა 2025-ზე.

ა მ ო ხ ს ნ ა

პ ა ს უ ხ ი: 5058

მოცემულობიდან გამომდინარეობს, რომ $m + 2n$ იყოფა 2023-ზე და $m - 2n$ იყოფა 2025. გამოდის, რომ $1012(m + 2n) - 2023n = 1012m + 2024n - 2023n = 1012m + n$ იყოფა 2023-ზე. ასევე, $1012(m - 2n) + 2025n = 1012m - 2024n + 2025n = 1012m + n$ იყოფა 2025-ზე. რადგან 2023 და 2025 ურთიერთმარტივებია, ამიტომ $1012m + n$ იყოფა $2023 \cdot 2025$ -ზე.

ვთქვათ, $k \geq 1$ მთელი რიცხვია და $1012m + n = 2023 \cdot 2025 \cdot k$. განვიხილოთ $k + n$

$$k + n = k + 2023 \cdot 2025 \cdot k - 1012m = 2024^2 \cdot k - 1012m = 1012(4k - m)$$

მივიღეთ, რომ $k + n$ იყოფა 1012-ზე და, შესაბამისად, $k + n \geq 1012$.

განვიხილოთ $1012(m + n)$.

$$\begin{aligned} 1012(m + n) &= 2012m + n + 1011n = 2023 \cdot 2025 \cdot k + 1011n = \\ &= 2023 \cdot 2025 \cdot k - 1011k + 1011k + 1011n = \\ &= (2023 \cdot 2025 - 1011)k + 1011(k + n) \geq 2023 \cdot 2025 - 1011 + 1011 \cdot 1012 = \\ &= 2024^2 - 1 + 1011^2 = 4 \cdot 1012^2 + 1010 \cdot 1012 \end{aligned}$$

მივიღეთ, რომ $1012(m + n) \geq 4 \cdot 1012^2 + 1010 \cdot 1012$. ესე იგი $m + n \geq 4 \cdot 1012 + 1010 = 5058$. ამ რიცხვის მისაღწევად საჭიროა, რომ $k = 1$ და $k + n = 1012$. ანუ უნდა ავიღოთ $n = 1011$. ხოლო m -ის როლში მოგვიწევს განვიხილოთ $m = 4 \cdot 1012 + 1010 - 1011 = 4 \cdot 1012 - 1 = 4047$. ამ რიცხვების შემთხვევაში $m + 2025n = 4047 + 2025 \cdot 1011 \equiv 1 + 2 \cdot 1011 = 2023 \equiv 0 \pmod{2023}$ და, ასევე, $m + 2023n = 4047 + 2023 \cdot 1011 \equiv -3 + (-2) \cdot 1011 = -2025 \equiv 0 \pmod{2025}$. ესე იგი $(m + n)$ -ის მინიმალური შესაძლო მნიშვნელობა გამოვიდა 5058.