



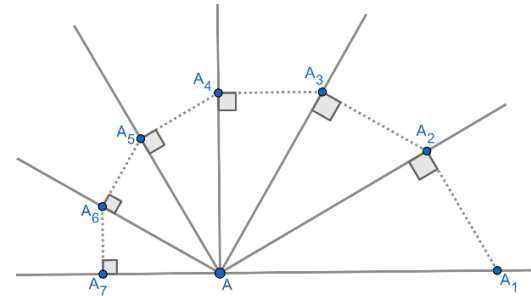
თილერის თლიშპიადა - 2025. პირველი ტური. (მეორე სესია)

ა მ თ ხ ს ნ ე ბ ი

ამოცანა 6: შვიდი სხივი ($\sqrt{2}$ ქულა)

(ამოცანის ავტორი: არაბიძე გიორგი)

სიბრტყეზე აღებულია A წერტილი. ამავე სიბრტყეში A წერტილიდან გავლებულია შვიდი სხივი ისე, რომ ყოველი შემდეგი სხივი წინა სხივთან ადგენს 30° -იან კუთხეს. (იხილეთ ნახაზი). პირველი სხივის A_1 წერტილის გეგმილი მეორე სხივზე არის A_2 , A_2 წერტილის გეგმილი მესამე სხივზე არის A_3 და ასე შემდეგ, მეექვსე სხივის A_6 წერტილის გეგმილი მეშვიდე სხივზე არის A_7 . იპოვეთ შეფარდება: $\frac{A_7A}{A_1A}$.



ა მ თ ხ ს ნ ა:

პ ა ს უ ხ ი: $\frac{27}{64}$

AA_1A_2 მართკუთხა სამკუთხედიდან გამომდინარეობს, რომ $AA_2 = AA_1 \cdot \cos 30^\circ = AA_1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$. ცხადია, რომ ყოველი შემდეგი გეგმილის სიგრძის მისაღებად საჭირო იქნება წინა გეგმილის $\frac{\sqrt{3}}{2}$ -ზე გამრავლება. რადგან სულ 6-ჯერ ხდება დაგეგმილება, ამიტომ მივიღებთ, რომ $AA_7 = AA_1 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^6$. შესაბამისად, მივიღეთ: $\frac{A_7A}{A_1A} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^6 = \frac{27}{64}$.

ამოცანა 7: ციფრული ფესვი (2 ქულა)

(ამოცანის ავტორი: ჩიტიშვილი ლია)

ნატურალური რიცხვის ციფრული ფესვი დავარქვათ ამ რიცხვის ციფრთა ჯამის გამოთვლის იტერაციული პროცესის ბოლოს მიღებულ ციფრს. ნებისმიერი ნატურალური n რიცხვისთვის აღვნიშნოთ $s(n)$ -ით n -ის ციფრული ფესვი. (მაგალითად: $s(187) = 7$, რადგან 187-ის ციფრთა ჯამი არის 16, ხოლო 16-ის ციფრთა ჯამი არის 7). გამოთვალეთ ჯამი:

$$s(1^2) + s(2^2) + s(3^2) + \dots + s(2025^2)$$

ა მ თ ხ ს ნ ა

პ ა ს უ ხ ი: 11 475

ვაჩვენოთ, რომ ნებისმიერი ნატურალური n რიცხვისთვის როცა n არ იყოფა 9-ზე, მაშინ $s(n)$ არის n -ის 9-ზე გაყოფისას მიღებული ნაშთი, ხოლო როცა n იყოფა 9-ზე, მაშინ $s(n) = 9$.

როგორც ცნობილია, რიცხვი და მისი ციფრთა ჯამი 9-ზე გაყოფისას ერთი და იგივე ნაშთს გვაძლევენ. ესე იგი ნებისმიერი ნატურალური n რიცხვისთვის n -ის და $s(n)$ -ის 9-ზე გაყოფისას ერთნაირი ნაშთი მიიღება. ცხადია, ციფრული ფესვი ვერასოდეს გახდება 0. ესე იგი 9-ის ჯერადი რიცხვებისთვის ციფრული ფესვი 9-ის ტოლი გამოვა, ხოლო ყველა სხვა შემთხვევაში მივიღებთ ზუსტად იმ ნაშთს, რასაც ეს რიცხვი გვაძლევს 9-ზე გაყოფისას.

განვიხილოთ ნებისმიერი 9 მომდევნო ნატურალური რიცხვი, რომელშიც უდიდესი რიცხვი იქნება 9-ის ჯერადი: $9k + 1, 9k + 2, \dots, 9k + 8, 9k + 9$. დავადგინოთ რა იქნება თითოეული მათგანის კვადრატების ციფრული ნაშთების ჯამი. გემოაღნიშნული მსჯელობის ლოგიკიდან გვექნება შემდეგი:

$$\begin{aligned} & s((9k + 1)^2) + s((9k + 2)^2) + \dots + s((9k + 9)^2) \\ &= s(1^2) + s(2^2) + s(3^2) + s(4^2) + s(5^2) + s(6^2) + s(7^2) + s(8^2) + s(9^2) = \\ &= s(1) + s(4) + s(9) + s(16) + s(25) + s(36) + s(49) + s(64) + s(81) = \\ &= 1 + 4 + 9 + 7 + 7 + 9 + 4 + 1 + 9 = 51 \end{aligned}$$

რადგან 1-იდან 2025-ის ჩათვლით ზუსტად $2025 \div 9 = 225$ -ცალი ცხრაეულია, ამიტომ

$$s(1^2) + s(2^2) + s(3^2) + \dots + s(2025^2) = 51 \cdot 225 = 11\,475$$

ამოცანა 8: π -ის მიახლოებები ($\sqrt{6}$ ქულა)

(ამოცანის ავტორი: შალიბაშვილი ირაკლი)

ვთქვათ, S სიმრავლე შედგება 3-ისა და 5-ის არაუარყოფითი მთელი ხარისხებისაგან: $S = \{1, 3, 5, 3^2, 5^2, \dots\}$. S სიმრავლის ისეთი a და b რიცხვებისთვის, რომელთათვისაც $\left| \pi - \frac{a}{b} \right| < 0,1$, დაადგინეთ ab ნამრავლის უმცირესი შესაძლო მნიშვნელობა. ($\pi \approx 3,141$).

ა მ თ ხ ს ნ ა

პ ა ს უ ხ ი: 2025

როდესაც $a = 81$ და $b = 25$, მაშინ $\frac{a}{b} = 3,24$, რაც მოცემულ უტოლობას აკმაყოფილებს რადგან $\pi > 3,14$. ამ დროს $ab = 81 \cdot 25 = 2025$.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ უფრო მცირე ნამრავლის მიღება შეუძლებელია. დავუშვათ არსებობს ისეთი a და b , რომელთათვისაც $\left| \pi - \frac{a}{b} \right| < 0,1$ და $ab < 2025$. ცხადია შესრულდება შემდეგი უტოლობა. $\frac{a}{b} > \pi - 0,1 > 3$. აქედან გამომდინარე $b^2 < b \cdot \frac{a}{2} < \frac{2025}{3} = 675$. მივიღეთ, რომ $b^2 < 675$. ესე იგი b -ს შესაძლო ვარიანტებია: 1, 3, 5, 9 და 25. განვიხილოთ ყველა შემთხვევა.

როცა $b = 1$, მაშინ $\pi - \frac{3}{1} > 0,1$ და $\pi - \frac{5}{1} < -0,1$. ესე იგი არცერთი a არ დააკმაყოფილებს მოთხოვნას.

როცა $b = 3$, მაშინ $\pi - \frac{9}{3} > 0,1$ და $\pi - \frac{25}{3} < -0,1$. ესე იგი არცერთი a არ დააკმაყოფილებს მოთხოვნას.

როცა $b = 9$, მაშინ $\pi - \frac{27}{9} > 0,1$ და $\pi - \frac{81}{9} < -0,1$. ესე იგი არცერთი a არ დააკმაყოფილებს მოთხოვნას.

როცა $b = 9$, მაშინ $\pi - \frac{27}{9} > 0,1$ და $\pi - \frac{81}{9} < -0,1$. ესე იგი არცერთი a არ დააკმაყოფილებს მოთხოვნას.

როცა $b = 25$, მაშინ $\pi - \frac{27}{25} > 0,1$. ხოლო თუ $a = 81$, მაშინ ვიღებთ სასურველ შედეგს.



ამოცანა 9: წრეწირები ($\sqrt{8}$ ქულა)

(ამოცანის ავტორი: ტურაშვილი თამარი)

მოცემულია სამი წრეწირი, რომელთა რადიუსებია 1სმ., 2სმ. და 3სმ. ცნობილია, რომ ისინი წვეთიანად ეხებიან ერთმანეთს გარედან. იპოვეთ იმ წრეწირის რადიუსი, რომელსაც სამივე მოცემული წრეწირი ეხება შიგნიდან.

ა მ თ ხ ს ნ ა

პ ა ს უ ხ ი: 6სმ.

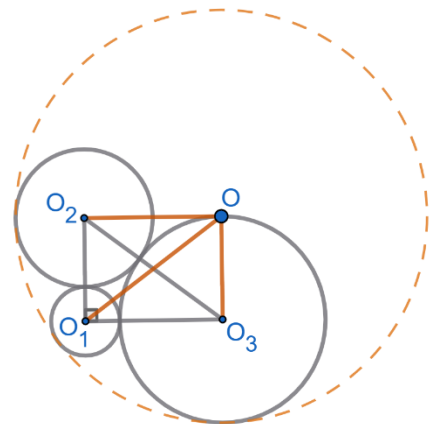
მოცემული წრეწირების ცენტრები, რომელთა რადიუსებია 1სმ., 2სმ. და 3სმ., შესაბამისად, აღვნიშნოთ O_1 -ით, O_2 -ით და O_3 -ით.

ცხადია, რომ $O_1O_2 = 1 + 2 = 3$, $O_1O_3 = 1 + 3 = 4$ და $O_2O_3 = 2 + 3 = 5$. რადგან $3^2 + 4^2 = 5^2$, ამიტომ კუთხე $O_2O_1O_3$ არის მართი.

განვიხილოთ ისეთი O წერტილი, რომლისთვისაც $O_1O_2OO_3$ ოთხკუთხედი არის მართკუთხედი და დავაკვირდეთ O წერტილიდან წრეწირების ცენტრებამდე დაშორებებს.

ცხადია, სრულდება ტოლობები: $OO_1 = O_2O_3 = 5$, $OO_2 = O_1O_3 = 4$ და $OO_3 = O_1O_2 = 3$.

რადგან $OO_1 + 1 = 6$, ასევე, $OO_2 + 2 = 6$ და $OO_3 + 3 = 6$, გამოდის, რომ წრეწირს, რომლის რადიუსი არის 6სმ. და ცენტრი არის O წერტილში სამივე მოცემული წრეწირი შიგნიდან ეხება. ესე იგი საძიებელი წრეწირის რადიუსი ყოფილა 6სმ.





ამოცანა 10: დროშა ოქროსფერი ვარსკვლავებით ($\sqrt{11}$ ქულა)

(ამოცანის ავტორი: არაბიძე გიორგი)

დროშის ლურჯ ფონზე წრიულად განლაგებულია 12 ოქროსფერი ვარსკვლავი. გიორგის სურს, რომ თითოეულ ვარსკვლავში ჩაწეროს ერთი ასო შემდეგი სამიდან: ან G , ან E ან O ისე, რომ არცერთ ორ მეზობელ ვარსკვლავში არ ეწეროს ერთი და იგივე. დაადგინეთ, რამდენი განსხვავებული გზით შეუძლია მას ამის გაკეთება?



ა მ ო ხ ს ნ ა

პ ა ს უ ხ ი: 4098

ვთქვათ, დროშაზე წრიულად განლაგებულია არა 12, არამედ ნებისმიერი $n \geq 3$ რაოდენობის ვარსკვლავი და ისინი საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით გადავნიშნოთ 1-იდან n -ის ჩათვლით ნატურალური რიცხვებით. პირველი ნომერი იყოს, ვთქვათ, ყველაზე მაღლა მდებარე ვარსკვლავი. n ზომის შევსება დავარქვათ ამ n -ცალ ვარსკვლავში G, E და O ასოების ისეთ ჩაწერას, როცა ყოველ მეზობელ ვარსკვლავში წერია განსხვავებული ასო. a_n -ით აღვნიშნოთ ამ n ზომის შევსებათა რაოდენობა. ჩვენი ამოცანის პასუხი გამოვა a_{12} .

მოდით, a_n ვიპოვოთ a_{n-1} -სა და a_{n-2} -ის საშუალებით. ცხადია, რომ ნებისმიერ $n - 1$ ზომის შევსებას შეესაბამება ერთადერთი n ზომის შევსება, რადგან პირველ და $(n - 1)$ -ე ვარსკვლავებს შორის, რომლებშიც განსხვავებული ასოები უნდა ეწეროს, უნდა ჩავამატოთ ერთი ასო და ის უნდა იყოს განსხვავებული, როგორც პირველ ვარსკვლავში ჩაწერილი, ასევე, $(n - 1)$ -ე ვარსკვლავში ჩაწერილი ასოსგან. ასეთი ჩაწერა იქნება ერთადერთი. ანუ გამოდის, რომ $a_n = a_{n-1} + X$, სადაც ეს X არის ისეთი n ზომის შევსების რაოდენობა, რომელსაც ვერ მივიღებდით $n - 1$ ზომის შევსებებში ერთი ასოს ჩამატებით. მოდით, დავადგინოთ თუ როგორი n ზომის შერჩევები დავგრაჟა კიდეც, ანუ როგორი n ზომის შერჩევები შედის X რაოდენობაში. ცხადია, რომ იმ n ზომის შერჩევებში, რომლებიც მივიღეთ $(n - 1)$ ზომის შერჩევებისგან, პირველ და $(n - 1)$ -ე ვარსკვლავებში აუცილებლად გასხვავებული ასოები ეწერა. ანუ X გამოვა იმ n ზომის შერჩევათა რაოდენობა, რომელშიც პირველ და $(n - 1)$ -ე ვარსკვლავებში ერთი და იგივე ასოები წერია.

განვიხილოთ ნებისმიერი $(n - 2)$ ზომის შევსება და მას შევუსაბამოთ რამდენიმე ისეთი n ზომის შევსება, რომელშიც პირველ და $(n - 1)$ -ე ვარსკვლავებში ერთი და იგივე ასოები წერია. სულ დასამატებელია ორი ვარსკვლავი, $(n - 1)$ -ე და მე- n . $(n - 1)$ -ე ვარსკვლავში გარანტირებულად ვწერთ იმ ასოს, რომელიც წერია პირველში, ხოლო მე- n ვარსკვლავში შეგვიძლია ჩავსვათ



ნებისმიერი ასო, რომელიც არ ემთხვევა პირველ ვასკვლავში ჩაწერილ ასოს. ასეთი კი ორი ვარიანტი იქნება. ანუ მივიღეთ, რომ $X = 2a_{n-2}$. ესე იგი $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$.

ინდუქციის მეთოდის გამოყენებით დავასაბუთოთ, რომ $a_n = 2^n + 2 \cdot (-1)^n$, ყოველი ნატურალური n რიცხვისთვის. ჯერ ვაჩვენოთ, რომ $a_2 = a_3 = 6$. თუ დროშაზე მხოლოდ ორი ვარსკვლავია, მაშინ პირველში ასოს ჩაწერის 3 ვარიანტი გვაქვს, ხოლო მეორეში გვრჩება 2 ვარიანტი, ანუ $a_2 = 3 \cdot 2 = 6$. თუ დროშაზე არის 3 ვარსკვლავი, მაშინ პირველში ასოს ჩაწერის 3 ვარიანტი გვაქვს, მეორეში - 2 ვარიანტი, ხოლო მესამეში ჩაწერილი ასო არ უნდა დაემთხვეს არც პირველს და არც მეორეს, ამიტომ მესამეში ჩაწერის მხოლოდ 1 ვარიანტი გვრჩება. შესაბამისად, $a_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. მართლაც $2^2 + 2 \cdot (-1)^2 = 6$ და $2^3 + 2 \cdot (-1)^3 = 6$. ესე იგი ინდუქციური ბაზისი სრულდება.

ახლა დავუშვათ, რომ როცა $n = k - 2$ და $n = k - 1$, მაშინ ფორმულა სამართლიანია. ანუ $a_{k-2} = 2^{k-2} + 2 \cdot (-1)^{k-2}$ და $a_{k-1} = 2^{k-1} + 2 \cdot (-1)^{k-1}$. განვიხილოთ სიტუაცია, როცა $n = k$.

$$\begin{aligned} a_k &= a_{k-1} + 2a_{k-2} = 2^{k-1} + 2 \cdot (-1)^{k-1} + 2(2^{k-2} + 2 \cdot (-1)^{k-2}) = \\ &= 2^{k-1} + 2 \cdot (-1)^{k-1} + 2^{k-1} + 4 \cdot (-1)^{k-2} = \\ &= 2^k + 2((-1)^{k-1} + (-1)^{k-2}) + 2 \cdot (-1)^{k-2} = 2^k + 2 \cdot (-1)^k \end{aligned}$$

მივიღეთ, რომ $n = k$ შემთხვევაშიც სამართლიანია $a_n = 2^n + 2 \cdot (-1)^n$ ტოლობა. აქედან გამომდინარე $a_{12} = 2^{12} + 2 \cdot (-1)^{12} = 4096 + 2 = 4098$.

შ ე ნ ი შ ნ ა: თეორია იმის შესახებ, თუ როგორ გამოვიცნოთ რომელი ფორმულა აკმაყოფილებს $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ ტიპის წრფივ რეკურენტულ დამოკიდებულებას, შეგიძლიათ ნახოთ აქ: <https://www.google.com/search?q=linear+recursive+formula&og=linear+recurrence+formula&qslcrp=EgZjaHJvbWUqCAqBEAAYFhqeMqglABBFgDkYgAQyCAqBEAAYFhqeMqglAhAAGBYHjIICAMQABqWGB4yCAqEEAAYFhqeMqglBRAAGBYHjIICAYQABqWGB4yCAqHEAAYFhqeMqglCBAAGBYHjIICAKQABqWGB7SAQkxNiMxNmowaieoAgiwAgHxBcAg115ReQK-&sourceid=chrome&ie=UTF-8#fpstate=ive&vld=cid:4eac627f,vid:aHw7hAAjbD0,st:0>