



თილერის თლიშვიადა. მეორე ტური. (მეორე სესია)

9 აპრილი, 2025

ამოცანა 4:

იპოვეთ ყველა $f: \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \rightarrow \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ ფუნქცია თუ ცნობილია, რომ ნებისმიერი $x, y \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ რიცხვებისთვის $f(xy) = f(x)f(y)$ და $f(x+y) = f(x) + f(y)$, სადაც $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$.

($\mathbb{Q}$ აღნიშნავს რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეს.)

ამოცანა 5:

მოცემულია უჯრების სტრიქონი, რომელიც ორივე მიმართულებით უსასრულოდ გრძელდება. სტრიქონის ზოგიერთ უჯრაში მოთავსებულია ერთი ან რამდენიმე კენჭი. კენჭების საერთო რაოდენობა სასრულია. მოთამაშე ყოველ ჯერზე ასრულებს შემდეგი სამი სვლიდან რომელიმეს:

1. ერთერთი უჯრიდან იღებს სამ კენჭს და ამ უჯრიდან თითო უჯრის გამოტოვებით მარცხნივ და მარჯვნივ უჯრებში ამატებს თითო კენჭს.

+1		-3		+1
----	--	----	--	----

2. ერთერთი უჯრიდან იღებს ორ კენჭს და ამ უჯრის მარცხნივ ერთი უჯრის გამოტოვებით და მარჯვნივ მეზობელ უჯრაში ამატებს თითო კენჭს.

+1		-2	+1	
----	--	----	----	--

3. რომელიმე ორი მეზობელი უჯრიდან იღებს თითო კენჭს და მარჯვნივ მეზობელ უჯრაში ამატებს ერთ კენჭს.

	-1	-1	+1	
--	----	----	----	--

პროცესი სრულდება მაშინ, როდესაც სვლის გაკეთება შეუძლებელია. დაამტკიცეთ, რომ პროცესი აუცილებლად დასრულდება და კენჭების საბოლოო განლაგება არ არის დამოკიდებული იმაზე, თუ როგორ იმოქმედებს მოთამაშე.

ამოცანა 6:

ნებისმიერი $S \subset \mathbb{N}$ სიმრავლისთვის $f: S \rightarrow S$ ფუნქციას დავარქვათ *საინტერესო*, თუ სრულდება შემდეგი ორი პირობა:

1. არ არსებობს ისეთი $a \in S$ ელემენტი, რომლისთვისაც $f(a) = a$.

2. ნებისმიერი $a \in S$ ელემენტისთვის $f^{f(a)+1}(a) = a$.

დაამტკიცეთ, რომ

ა) არსებობს უსასრულოდ ბევრი საინტერესო $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ფუნქცია.

ბ) არსებობს უსასრულოდ ბევრი დადებითი მთელი n რიცხვი, რომლისთვისაც არ არსებობს $\{1, 2, \dots, n\}$ სიმრავლეზე განსაზღვრული საინტერესო $f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ ფუნქცია.

($f^k(a) = \underbrace{f(f(f \dots f(a) \dots))}_{k\text{-ჯერ}}$). ასევე, $\mathbb{N}$ აღნიშნავს დადებით მთელ რიცხვთა სიმრავლეს.)

წერის ხანგრძლივობა: 3 საათი.

თითოეული ამოცანა ფასდება მაქსიმუმ 7 ქულით.