

თილერის თეორემა. მეორე ტური. (პირველი სესია)

ამოხსნები

ამოცანა 1:

(ამოცანის ავტორი: Stijn Cambie)

დადებით მთელ რიცხვთა ურთიერთმარტივ (n, m) წყვილს ვუწოდოთ *გადაჭაჭვული*, თუ n -ის ნებისმიერ ორ ერთზე მეტ გამყოფს შორის მოიძებნება m -ის გამყოფი და, ასევე, m -ის ნებისმიერ ორ ერთზე მეტ გამყოფს შორის მოიძებნება n -ის გამყოფი. მაგალითად $(63, 64)$ წყვილი გადაჭაჭვულია.

ა) იპოვეთ უდიდესი k რიცხვი, რომლისთვისაც მოიძებნება გადაჭაჭვული (n, m) წყვილი და nm ნამრავლი წარმოადგენს პირველი k -ცალი მარტივი რიცხვის ნამრავლს.

ბ) დაამტკიცეთ, რომ არ არსებობს ისეთი გადაჭაჭვული (n, m) წყვილი, რომლისთვისაც nm ნამრავლი წარმოადგენს 2025-ცალი განსხვავებული მარტივი რიცხვის ნამრავლს.

გ) დაამტკიცეთ, რომ არსებობს ისეთი გადაჭაჭვული (n, m) წყვილი, რომლისთვისაც n -ის ნატურალურ გამყოფთა რაოდენობა მეტია 2025-ზე.

ამოხსნა:

პასუხი: ა) $k = 8$

ა) პირობის თანახმად $nm = 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot p_k$. ჩვენი მიზანია დავადგინოთ 2-იდან დაწყებული მაქსიმუმ რამდენი მარტივი რიცხვი შეიძლება გადანაწილდეს n და m რიცხვებში ისე, რომ (n, m) წყვილი გამოვიდეს გადაჭაჭვული.

ზოგადობის დაურღვევლად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $n : 2$. რადგან 2-სა და 3-ს შორის ნატურალური რიცხვი არ არსებობს, ამიტომ $m : 3$. რადგან 4 ვერ იქნება n -ის ან m -ის გამყოფი, ამიტომ $n : 5$. პირობის თანახმად n და m ურთიერთმარტივია, შესაბამისად $m \nmid 6$. ესე იგი $m : 7$. შემდეგი რიცხვი, რომელიც შეიძლება იყოს n -ის გამყოფი არის 10. მართლაც $n : 2$ და $n : 5$.

შემდეგი მარტივი რიცხვი, 11, უნდა იყოს m -ის გამყოფი. 12 ვერ იქნება n -ის ან m -ის გამყოფი. ესე იგი $n : 13$. ურთიერთმარტივობის გამო 14 და 15 ვერ იქნება n -ის ან m -ის გამყოფი, ასევე, 16 ისედაც არ შეიძლება ყოფილიყო რომელიმე მათგანის გამყოფი. ესე იგი $m : 17$. რადგან 18 თანამამრავლად შეიცავს ერთზე მეტ 3-იანს, 18 ვერ იქნება n -ის ან m -ის გამყოფი. ესე იგი $n : 19$. იგივე ლოგიკით 20 ვერ იქნება n -ის ან m -ის გამყოფი, ხოლო 21 არის m გამყოფი. ურთიერთმარტივობის გამო 22 არ არის n -ის ან m -ის გამყოფი. გამოდის, რომ თუ გვსურს, რომ k იყოს 8-ზე მეტი, მაშინ n უნდა იყოფოდეს 23-ზე. მაგრამ ამ შემთხვევაში მივიღებდით, რომ $n : 23$ და $n : 26$, ამასთან, 24 და 25 ვერ იქნებოდნენ m -ის გამყოფები და გამოვიდოდა, რომ n -ის ორ გამყოფს შორის არ მოიძებნებოდა m -ის გამყოფი, რაც დაარღვევდა გადაჭაჭვულობის პირობას. მივიღეთ, რომ $k \leq 8$.

სიტუაცია, როდესაც $k = 8$, მიიღწევა მაშინ, როცა $n = 2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 19$ და $m = 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 17$. მართლაც თუ ამ ორი რიცხვის ყველა ერთზე მეტ გამყოფს ჩამოვწერთ ზრდის მიხედვით, ისინი რიგრიგობით მოენაცვლებიან ერთმანეთს:

**2; 3; 5; 7; 10; 11; 13; 17; 19; 21; 26; 33; 38; 51; 65; 77; 95; 119;
130; 187; 190; 231; 247; 357; 494; 561; 1235; 1309; 2470; 3927.**

ბ) დავუშვათ საწინააღმდეგო. ვთქვათ, არსებობს 2025 ცალი განსხვავებული მარტივი რიცხვი: $p_1, p_2, \dots, p_{2025}$ და გადაჭაჭვული (n, m) წყვილი, სადაც $nm = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_{2025}$. ვთქვათ, n არის ამ 2025 ცალი მარტივი რიცხვიდან t ცალის ნამრავლი. ურთიერთმარტივობის გამო m იქნება დანარჩენი $(2025 - t)$ ცალის ნამრავლის ტოლი. გადაჭაჭვულობის პირობა, ცხადია, გულისხმობს, რომ n -ის და m -ის გამყოფების რაოდენობები მაქსიმუმ ერთით უნდა განსხვავდებოდნენ. ესე იგი

$$|2^t - 2^{2025-t}| \leq 1$$

ეს კი შეუძლებელია, რადგან $|2^t - 2^{2025-t}| \geq |2^{1013} - 2^{1012}| = 2^{1012} > 1$. ანუ არ არსებობს ისეთი გადაჭაჭვული (n, m) წყვილი, რომლისთვისაც nm ნამრავლი წარმოადგენს 2025-ცალი განსხვავებული მარტივი რიცხვის ნამრავლს.

გ) ვაჩვენოთ, რომ არსებობს ორი ისეთი მარტივი p და q რიცხვი, რომელთათვისაც $p < q$ და $q^a < p^{a+1}$ ნებისმიერი 2025-ზე ნაკლები დადებითი მთელი a რიცხვისთვის. მოდით, შევარჩიოთ ისეთი მარტივი p რიცხვი, რომ $p > 2^{2024}$ და შევარჩიოთ ისეთი მარტივი q რიცხვი, რომ $p < q < 2p$. ასეთი მარტივი q რიცხვი არსებობს ჩებიშევის თეორემის (იგივე ბერტრანდის პოსტულატი) თანახმად: https://en.wikipedia.org/wiki/Bertrand%27s_postulate. ასეთი შერჩევებიდან გამომდინარე ნებისმიერი 2025-ზე ნაკლები დადებითი მთელი a რიცხვისთვის გვექნება: $p > 2^{2024} \geq 2^a > \left(\frac{q}{p}\right)^a$. ანუ $q^a < p^{a+1}$. გამოვიდა, რომ თუ $n = p^{2025}$ და $m = q^{2025}$, მაშინ (n, m) წყვილი არის გადაჭაჭვული

$$p < q < p^2 < q^2 < \dots < p^a < q^a < p^{a+1} < q^{a+1} < \dots < p^{2025} < q^{2025}$$

და, ამასთან, $n = p^{2025}$ -ს აქვს 2025-ზე მეტი გამყოფი.

ამოცანა 2:

(ამოცანის ავტორი: გიორგი არაბიძე)

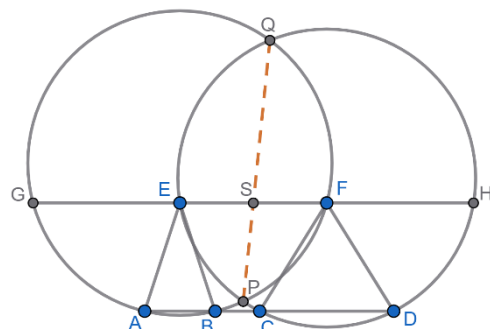
წრფეზე აღებულია A, B, C და D წერტილები ამავე თანმიმდევრობით, ხოლო წრფის გარეთ აღებულია E და F წერტილები ისე, რომ $EA = EB$, $FC = FD$ და $EF \parallel AD$. ვთქვათ, ABF და CDE სამკუთხედებზე შემოხაზული წრეწირები იკვეთებიან P და Q წერტილებში, ხოლო ACF და BDE სამკუთხედებზე შემოხაზული წრეწირები იკვეთებიან M და N წერტილებში. დაამტკიცეთ, რომ

ა) PQ წრფე გაივლის EF მონაკვეთის შუა წერტილზე.

ბ) MN წრფე გაივლის EF მონაკვეთის შუა წერტილზე.

ამოხსნა:

ა) განვიხილოთ EF წრფის ABF და CDE სამკუთხედებზე შემოხაზულ წრეწირებთან გადაკვეთის G და H წერტილები. ცხადია, რომ AB მონაკვეთის შუამართობი გადის E წერტილზე და, ასევე, ABF სამკუთხედზე შემოხაზულ წრეწირის ცენტრზე. ესე იგი ეს შუამართობი GF მონაკვეთის შუამართობიც იქნება. ამიტომ $GE = EF$. ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ $HF = FE$.



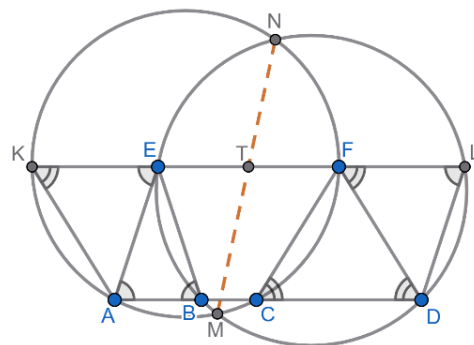
PQ წრფის EF წრფესთან გადაკვეთის წერტილი აღვნიშნოთ S -ით. ვთქვათ, $ES = x$ და $SF = y$. მაშინ ცხადია, რომ $GE = FH = x + y$. გადამკვეთი ქორდების თვისების თანახმად გვაქვს შემდეგი ტოლობები: $FS \cdot SG = PS \cdot SQ = ES \cdot SH$. ანუ გვექნება შემდეგი ტოლობა: $x(2y + x) = y(2x + y)$. აქედან ცხადია, რომ $x = y$, ანუ $ES = SF$.

ბ) განვიხილოთ EF წრფის ACF და BDE სამკუთხედებზე შემოხაზულ წრეწირებთან გადაკვეთის K და L წერტილები. ცხადია, გვექნება შემდეგი ტოლობები:

$$\angle DLF = \angle ABE = \angle EAB = \angle AEK$$

და

$$\angle AKE = \angle FCB = \angle FDC = \angle DFL$$



ასევე, $AK = CF = FD$. ესე იგი AKE და DFL სამკუთხედები ტოლია. ანუ $KE = FL$.

MN წრფის EF წრფესთან გადაკვეთის წერტილი აღვნიშნოთ T -ით. ვთქვათ, $ET = a$, $TF = b$ და $KE = FL = c$. უერთერთგადამკვეთი ქორდების თვისების თანახმად გვაქვს შემდეგი ტოლობები: $FT \cdot TK = MT \cdot TN = ET \cdot TL$. ანუ გვექნება შემდეგი ტოლობა: $a(b + c) = b(a + c)$. აქედან ცხადია, რომ $a = b$, ანუ $ET = TF$.

ამოცანა 3:

(ამოცანის ავტორი: ზაზა მელიქიძე)

იპოვეთ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეზე განსაზღვრული ყველა $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ფუნქცია, რომელთათვისაც სრულდება შემდეგი ორი პირობა:

1. თუ რაიმე ნამდვილი a და b რიცხვებისთვის $a^2 + b^2 = 1$, მაშინ $f(x) + f(y) \geq f(ax + by)$ ყოველი ნამდვილი x და y რიცხვებისთვის.
2. ნებისმიერი ნამდვილი x და y რიცხვებისთვის მოიძებნება ნამდვილი a და b რიცხვები, რომელთათვისაც $a^2 + b^2 = 1$ და $f(x) + f(y) = f(ax + by)$.

ამოხსნა:

პასუხი: $f(x) = kx^2$, $\forall k \geq 0$.

თუ $x = y = 0$, მაშინ მე-2 პირობის თანახმად არსებობენ ისეთი a და b ნამდვილი რიცხვები, რომელთათვისაც $a^2 + b^2 = 1$ და $f(0) + f(0) = f(a \cdot 0 + b \cdot 0)$. აქედან ვასკვნით, რომ $f(0) = 0$.

ვთქვათ, $a = -1$ და $b = 0$. პირველი პირობიდან გამომდინარე, როცა $y = 0$, გვექნება შემდეგი: $f(x) \geq f(-x)$, $\forall x$. თუ x -ის ნაცვლად ავიღებთ $(-x)$ -ს, მივიღებთ $f(-x) \geq f(x)$. ამ ორი უტოლობის გაერთიანებით მივიღებთ, რომ $f(-x) = f(x)$, $\forall x$. ანუ $f(x)$ ფუნქცია ლუწია და საკმარისია მისი გამოკვლევა განვავრდოთ არგუმენტის მხოლოდ დადებითი მნიშვნელობებისათვის. ამიტომ ქვემოთ მსჯელობებში ყველგან ვიგულისხმებთ, რომ x , y და $ax + by$ არაუარყოფითი რიცხვებია.

ცხადია, რომ ნებისმიერი ნამდვილი $a \geq 0$ რიცხვისთვის არსებობს ისეთი b რიცხვი, რომლისთვისაც $a^2 + b^2 = 1$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $a \in [0, 1]$. აქედან გამომდინარე, თუ ავიღებთ $y = 0$, მივიღებთ, რომ $f(x) \geq f(ax)$, $\forall x \geq 0$ და $\forall a \in [0, 1]$. ეს კი ნიშნავს, რომ $f(x)$ ფუნქცია $[0, +\infty)$ შუალედზე არაკლებადია.

განვიხილოთ ნებისმიერი a, b, x და y არაუარყოფითი ნამდვილი რიცხვები, რომელთათვისაც $a^2 + b^2 = 1$. კოში-შვარცის უტოლობის თანახმად $ax + by \leq \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$. არაკლებადობის გამო: $f(ax + by) \leq f(\sqrt{x^2 + y^2})$. გამოდის, რომ ყოველი ფიქსირებული დადებითი x და y რიცხვებისთვის $f(ax + by)$ გამოსახულება აღწევს თავის მაქსიმალურ $f(\sqrt{x^2 + y^2})$ -ის ტოლ მნიშვნელობას მაშინ, როცა $a = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ და $b = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. ასევე, ჩვენთვის პირობიდან ცნობილია, რომ $f(ax + by)$ ვერასოდეს გადააჭარბებს $(f(x) + f(y))$ -ის ტოლ მნიშვნელობას, მაგრამ აუცილებლად მიაღწევს მას. ესე იგი $f(x) + f(y) = f(\sqrt{x^2 + y^2})$ ნებისმიერი დადებითი ნამდვილი x და y რიცხვებისთვის.

შემოვიღოთ არაუარყოფით ნამდვილ რიცხვებში განსაზღვრული ფუნქცია: $g(x) = f(\sqrt{x})$. დამტკიცებულის თანახმად გვექნება:

$$g(x) + g(y) = f(\sqrt{x}) + f(\sqrt{y}) = f\left(\sqrt{\sqrt{x}^2 + \sqrt{y}^2}\right) = f(\sqrt{x+y}) = g(x+y)$$

ესე იგი $g(x)$ ყოფილა კოშის ფუნქცია, რომელიც არის არაკლებადი. გაჩვენოთ, რომ ასეთი ფუნქცია არის მხოლოდ $g(x) = kx$, სადაც $k = g(1) \geq 0$. (არაკლებადობის გამო $g(1) \geq g(0) = 0$)

განვიხილოთ ნებისმიერი დადებითი მთელი n რიცხვი. ცხადია, რომ

$$g(n) = g(n-1) + g(1) = g(n-2) + g(1) + g(1) = \dots = \underbrace{g(1) + \dots + g(1)}_n = n \cdot g(1) = k \cdot n$$

განვიხილოთ ნებისმიერი დადებითი მთელი m რიცხვი:

$$m \cdot g\left(\frac{1}{m}\right) = g\left(\frac{2}{m}\right) + (m-2) \cdot g\left(\frac{1}{m}\right) = g\left(\frac{3}{m}\right) + (m-3) \cdot g\left(\frac{1}{m}\right) = \dots = g\left(\frac{m}{m}\right) = g(1) = k$$

ესე იგი $g\left(\frac{1}{m}\right) = k \cdot \frac{1}{m}$. განვიხილოთ ნებისმიერი დადებითი მთელი n და m რიცხვები:

$$g\left(\frac{n}{m}\right) = g\left(\frac{n-1}{m}\right) + g\left(\frac{1}{m}\right) = g\left(\frac{n-2}{m}\right) + g\left(\frac{1}{m}\right) + g\left(\frac{1}{m}\right) = \dots = \underbrace{g\left(\frac{1}{m}\right) + \dots + g\left(\frac{1}{m}\right)}_n = k \cdot \frac{n}{m}$$

მივიღეთ, რომ ნებისმიერი არაუარყოფითი რაციონალური x რიცხვისთვის $g(x) = kx$.

დავუშვათ, რომ არსებობს დადებითი ირაციონალური x რიცხვი, რომლისთვისაც $g(x) > kx$. აქედან $x < \frac{g(x)}{k}$. განვიხილოთ ისეთი რაციონალური $\frac{n}{m}$, რომლისთვისაც $x < \frac{n}{m} < \frac{g(x)}{k}$. ფუნქციის არაკლებადობის გამო გვექნება: $g(x) \leq g\left(\frac{n}{m}\right) = k \cdot \frac{n}{m} < g(x)$. რაც შეუძლებელია. ანალოგიურად გაჩვენებთ, რომ არ არსებობს დადებითი ირაციონალური x რიცხვი, რომლისთვისაც $g(x) < kx$. ესე იგი ნებისმიერი არაუარყოფითი x რიცხვისთვის $g(x) = kx$. მივიღეთ, რომ ნებისმიერი არაუარყოფითი x რიცხვისთვის $f(x) = g(x^2) = kx^2$, ხოლო $f(x)$ -ის ლუწობის გამო $f(x) = kx^2$ ნებისმიერი ნამდვილი x რიცხვისთვის. ადვილი შესამოწმებელია, რომ ყველა kx^2 ფუნქცია, სადაც $k \geq 0$, აკმაყოფილებს ამოცანის პირობებს.